Corso di Laurea in Fisica, Analisi (Canale D-K) 20-21
Dott. Galise
Esercitazione 11

Esercizio 1 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x \ln^2 x} \\ y(e) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' - y = 1 + t \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' - \dfrac{2ty}{1+t^2} = (t + t^3)\sin t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \cos^2 y \\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + 3x^2y^4 = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2 Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y'' + 3y' - 10y = 0 \qquad y'' - 4y' + 4y = 0 \qquad y'' - 2y' + 2y = 0 \qquad y'' - 2y' + y = t^2 + t$$

$$y'' - 2y' + y = e^t \qquad y'' - 2y' + 2y = e^{2t} \qquad y'' + 4y = \sin(2t) \qquad y'' + y' = e^t(3\cos t + \sin t)$$

Esercizio 3 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + y' + y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + y' = 5t + 2e^t \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - y = te^t \\ y(1) = -1,\ y'(1) = -1 \end{cases}$$

Esercizio 4 Determinate, se esistono, i valori del parametro k per cui il problema

$$\begin{cases} y'' + ky = 0 \\ y(-\frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni non identicamente nulle.

Esercizio 5 Sia $\varepsilon \in (0, 1)$. Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2\varepsilon y' + y = \sin t.$$

Determinare poi i valori delle condizioni iniziali (al tempo $t = 0$) per le quali la soluzione $y = y(t)$ rimane limitata per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6 Sia $\omega \in \mathbb{R}$ tale che $\omega \neq \pm 1$.

- Determinare la soluzione $y_\omega = y_\omega(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \sin(\omega t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

- Calcolare il limite

$$y_1(t) := \lim_{\omega \to 1} y_\omega(t)$$

- Verificare che y_1 è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \sin(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 7 Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) + y(t) = f(t)$

1. Se $f(t) = 0$ esistono infinite soluzioni concave in $\mathbb{R}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
2. Se $f(t) = 1$ non ci sono soluzioni limitate in $\mathbb{R}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
3. Se $f(t) = t$ l'equazione ammette per soluzione un polinomio $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
4. Se $f(t) = e^{-t}\sin^3 t$ la soluzione con dato iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ è $y(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t\right)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

Esercizio 8

1. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 3y' + 2y = 0$ è $y(t) = e^t - e^{2t}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
2. La soluzione del problema
$$\begin{cases} y'' = y \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$
è $y(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
3. Esistono soluzioni dell'equazione $y'' - y = 0$ che verificano la condizione: $\inf_{t\in\mathbb{R}} y(t) = 0$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
4. Se $y : (-1, 1) \mapsto \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione $y'' - (y')^2 = 0$, allora y è convessa $\boxed{V}$ $\boxed{F}$